1er Coloquio del Departamento de Matemáticas

Una introducción a las curvas algebraicas

Laura Hidalgo Solís

Casa abierta al tiempo

Una introducción a las curvas algebraicas

Laura Hidalgo Solís

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Capítulo 1

Introducción

En la presente nota nos interesa entender el siguiente problema:

Dado un polinomio homogéneo $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ de grado al menos uno, éste determina una curva algebraica $C = \{P \in \mathbb{P}^2 \mid F(P) = 0\}$, la cual tiene asociada una superficie de Riemann compacta, conexa S, y una función $\varphi\colon S \to \mathbb{P}^2$ cuya imagen es la curva C, φ es un biholomorfismo sobre su imagen "casi en todas partes". Si definimos el género de la curva C como el género de la superficie asociada S, resulta natural hacernos la siguiente pregunta: *¿Cómo podemos determinar el género de C a partir de la función F?*

En el caso en que la curva C sea no singular, veremos cómo se obtiene su género a partir del grado de F. Daremos algunos ejemplos de curvas singulares y veremos cómo contribuyen los puntos singulares en la estructura topológica de S, es decir, cómo influyen los puntos singulares de una curva para determinar su género.

1.1. Marco histórico

La geometría algebraica nació con el descubrimiento de las coordenadas cartesianas, y en sus inicios se dedico al estudio de propiedades particulares de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ definidos por ecuaciones polinomiales respecto a las coordenadas, y se desarrollo en torno a problemas de:

- clasificación;
- búsqueda de invariantes con respecto de algunas transformaciones del plano o el espacio;
- problemas de intersecciones;
- estudio de familias de puntos sobre una curva, o familias de curvas en una superficie.

El marco de investigaciones, que ha evolucionado mucho desde comienzos del siglo XIX hasta nuestros tiempos, durante el siglo XVII introduce el uso de los números complejos en el análisis de las curvas, lo cual condujo a concebir los puntos de coordenadas complejas.

Uno punto con coordenadas complejas pertenece a una variedad algebraica cuando este satisface las ecuaciones que la definen.

Este es el primer ejemplo de extensión del campo base. A partir de Riemann, las funciones definidas sobre una k-variedad algebraica tienen un papel cada vez más importante, ya no sólo interesa estudiar los conjuntos, ahora se toma en cuenta el tipo de funciones que esta admite, y las propiedades que las caracterisan, tenemos así:

- Funciones regulares; restricción de funciones definidas en k^n a la variedad.
- Funciones racionales; cocientes de funciones regulares bien definidas sobre la variedad.
- El grado de trascendencia del campo de funciones racionales se denomina la dimensión de la variedad. En particular, una variedad de dimensión 1 se llama curva, y de dimensión 2 superficie.
- Dos variedades algebraicas irreducibles con el mismo campo de funciones racionales se denominan birracionalmente equivalentes.

El hecho de que, al considerar el campo complejo, las variedades algebraicas afines sean casos particulares de variedades analíticas condujo al concepto de espacio anillado. Sobre una variedad algebraica afín se define una topología (no Hausdorff), llamada la topología de Zariski.

En el siglo XX podemos distinguir tres periodos, el primero de 1900 a 1930 esta influenciado por la escuela Italiana, representada por Castelnuovo, Enriques y Severi, quienes dan los lazos entre la geometría sintética y las técnicas algebro geométricas en el estudio de superficies, asimismo exploran las técnicas topológicas y analíticas. De 1930 a 1960 Zariski, Weil y Grothendieck introducen sistemáticamente las herramientas del álgebra conmutativa en la geometría algebraica, y encuentran un lenguaje común para hablar tanto de variedades proyectivas sobre campos de característica p como sobre el campo de los números complejos, creando así una geometría que incorpora la aritmética y la geometría proyectiva.

A comienzos del siglo XX las nociones generales de álgebra abstracta permiten generalizar los conceptos anteriores:

Si k es un campo, una k-variedad algebraica afín es el conjunto V de puntos en k^n que verifican una familia de ecuaciones polinomiales con coeficientes en k.

De 1960 a nuestros tiempos, la geometría algebraica se ha desarrollado en diversas direcciones destacando la geometría en dimensiones superiores, concretamente el estudio de sus singularidades, y la teoría de sus ciclos, y la teoría de moduli, es decir los parámetros que describen familias continuas de variedades.

Capítulo 2

Curvas algebraicas

2.1. El plano proyectivo.

A lo largo del presente trabajo $\mathbb{K}$ denotará un campo algebraicamente cerrado, y $\mathbb{C}$ denotará el campo de los números complejos.

Si n es un entero positivo, y $\mathbb{K}^{n+1}$ es el $(n+1)-$ésimo producto cartesiano, decimos que dos puntos $z, z' \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ *son equivalentes* si existe un escalar no nulo $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $z' = \lambda z$. El espacio proyectivo de dimensión n, que denotaremos $\mathbb{P}^n$ es, por definición, el conjunto de clases de equivalencia de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Bajo esta relación, es decir, $\mathbb{P}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$. Si equipamos a $\mathbb{P}^n$ con la topología cociente, tenemos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad compacta. Cuando $n = 2$ tenemos *el plano proyectivo*, si consideramos en $\mathbb{P}^2$ los conjuntos abiertos $U_k := \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_k \neq 0\}$, entonces $\{U_k\}_{k=0,1,2}$ constituye una cubierta abierta de $\mathbb{P}^2$, y cada U_k es homeomorfo a $\mathbb{K}^2$ de manera natural, por ejemplo $\phi_0(x_0; x_1; x_2) = (\frac{x_1}{x_0}; \frac{x_2}{x_0})$, éste último se denomina un *sistema afín de coordenadas*, y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dota al plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ de una estructura de variedad compleja de dimensión dos. La clase $(x_0; x_1; x_2)$ de un punto (x_0, x_1, x_2) se denomina la coordenada homogénea del punto.

Definición 2.1.1. Una transformación $\varphi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ dada por ecuaciones lineales simultaneas se denomina una transformación proyectiva.

En particular, si $\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, una transformación proyectiva es la inducida por una transformación lineal $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$.

Ejemplo 2.1.2. 1. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos identificar $\mathbb{P}^1$ con la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y una transformación proyectiva corresponde a una transformación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0$$

2. Si $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ está dada como $\varphi(x_0; x_1; x_2) := (x_0 + x_1 + x_2; x_0 + x_1; x_2)$, entonces φ es una transformación proyectiva.

En el análisis de las curvas algebráicas, utilizaremos tanto los sistemas homogéneos como los sistemas afines de coordenadas para estudiar los objetos de nuestro interes, a saber, las curvas algebraicas con puntos singulares.

DEFINICIÓN 2.1.3. Si $p_0, p_1, \ldots, p_r$ es un conjunto de puntos en $\mathbb{P}^n$, con $0 \leq r \leq n$, diremos que están en posición general si el espacio generado por estos puntos tiene dimensión r. Si $n \leq r$, diremos que los puntos están en posición general si cualesquier $n+1$ de ellos genera $\mathbb{P}^n$.

EJEMPLO 2.1.4. Los puntos $P_0 = (1;0;0), P_1 = (0;1;0), P_2 = (0;0;1)$ y $P_3 = (1;1;1)$ están en posición general en $\mathbb{P}^2$.

Si $(x_0; x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^n$, y si $a = (a_0; a_1; \ldots; a_n)$ es un punto en $\mathbb{P}^n$, el conjunto

$$H_a := \{(x_0; x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

es un conjunto bien definido, y se denomina un hiperplano en $\mathbb{P}^n$.

Cabe notar que dos puntos a y b están el mismo hiperplano si, y sólo sí $a \sim b$

2.2. Curvas Algebraicas.

DEFINICIÓN 2.2.1. Sea $F = F(x_0, x_1, x_2)$ un polinomio homogéneo de grado n ($n \geq 1$) en las variables x_0, x_1 y x_2. El conjunto

$$Z(F) = \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0; x_1; x_2) = 0\}$$

está bien definido y se denomina *una curva algebraica plana* o simplemente una curva plana.

Las curvas planas de grado uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ... se denominan respectivamente: líneas, cónicas, cúbicas, cuárticas, quínticas, séxticas,. . .

EJEMPLO 2.2.2. 1. Si $F(x_0, x_1, x_2) = x_0 + x_1 + x_2$, entonces $Z(F)$ es una línea en $\mathbb{P}^2$. En el plano afín $U_2 = \{(x_0; x_1; x_2) \mid x_2 = 1\}$, esta línea corresponde a $x_0 + x_1 + 1 = 0$.

2. Si $E(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1$, entonces $Z(E)$ corresponde a un par de líneas en $\mathbb{P}^2$, a saber $Z(E) = \{x_0 = 0\} \cup \{x_1 = 0\}$.
3. Si $G(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1 - x_2^2$, entonces $Z(G)$ es una cónica en $\mathbb{P}^2$. En el plano $U_2 = \{x_2 = 1\}$, ésta corresponde a $x_0x_1 = 1$, (una hipérbola euclideana), mientras que en el plano $U_0 = \{x_0 = 1\}$, ésta ecuación corresponde a $x_1 = x_2^2$, (una parábola euclideana).
4. Si $H(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 - x_1x_2^2$, en el plano $U_2 = \{x_2 = 1\}$ esta ecuación tiene asociada la curva $x_0^3 = x_1$. La curva $Z(H)$ es una cúbica.

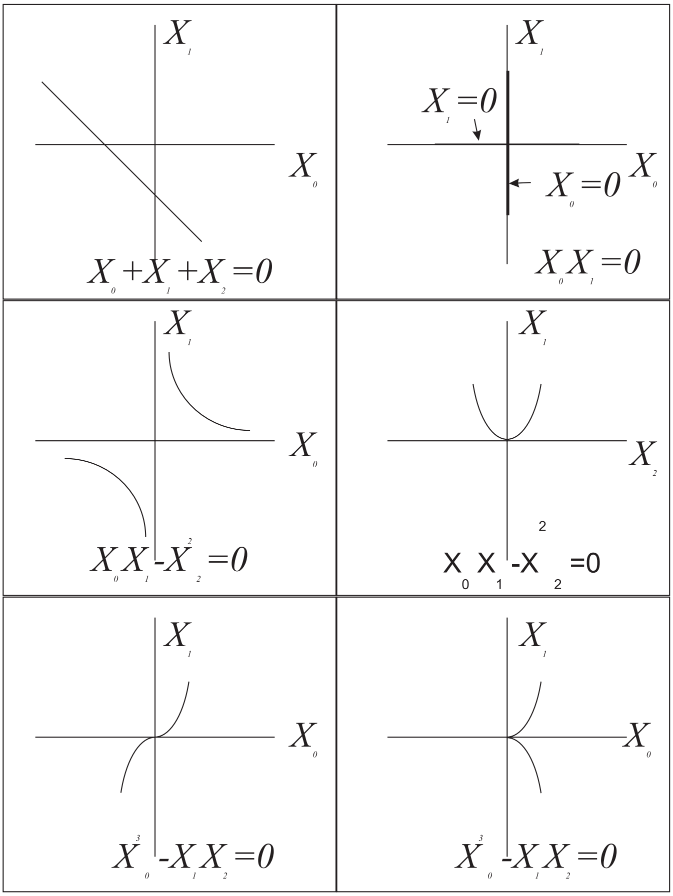

Figura 2.1. La parte real afín de las curvas algebraicas dadas en los ejemplos anteriores.

Cabe notar que *una curva plana puede tener componentes múltiples.* Por ejemplo, si $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1$, como conjunto, la curva asociada consta de dos líneas, a saber la línea $x_0 = 0$ unión la línea $x_1 = 0$, pero debemos notar que como curva algebraica la línea $x_0 = 0$ aparece con multiplicidad dos.

Ya que en el plano proyectivo $(x_0; x_1; x_2)$ y $\lambda(x_0; x_1; x_2)$ determinan el mismo punto, notamos que, si F es un polinomio homogéneo, entonces F y λF tienen el mismo conjunto de ceros, por lo cual podemos decir que dos polinomios homogéneos F y G no nulos de grado n son equivalentes si y solamente si $G = \lambda F$ para algún $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, así no distinguiremos entre la curva determinada por F y por λF, con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

DEFINICIÓN 2.2.3. Diremos que dos curvas planas F y G son *proyectivamente equivalentes* si hay una transformación proyectiva $T : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $G \circ T = F$.

Usando coordenadas, esto es equivalente a pedir una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{C})$ tal que, como polinomios tengamos la siguiente identidad:

$$G(\sum_{j=0}^{2} a_{0j}x_j, \sum_{j=0}^{2} a_{1j}x_j, \sum_{j=0}^{2} a_{2j}x_j) = F(x_0, x_1, x_2).$$

EJEMPLO 2.2.4. La curva $Z(G) := \{(x_0; x_1; x_2) \mid x_0x_2 + x_1^2 = 0\}$ es proyectivamente equivalente a la curva $Z(F) := \{(x_0; x_1; x_2) \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0\}$. Sea $T : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$, la transformación dada por $T(x_0, x_1, x_2) := (x_0 + x_1 + x_1, x_0 + x_1, x_2)$, entonces $F = G \circ T$.

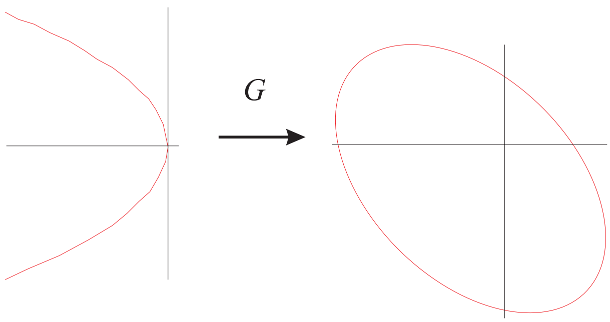

Figura 2.2. Curvas proyectivamente equivalentes.

Una *propiedad proyectiva* (o invariante proyectivo) de una curva plana es una propiedad que es invariante bajo equivalencia proyectiva, esto es, bajo un cambio de sistemas coordenados homogéneos. Un ejemplo de invariante proyectivo es el grado de una curva plana.

2.2.1. Líneas y Cónicas. Regresando a nuestros ejemplos, una *línea* ℓ en $\mathbb{P}^2$ está definida por:

$$\ell := \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid L(x_0; x_1; x_2) = 0\}.$$

donde $L(x_0, x_1, x_2) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ es una forma lineal, esto es, un polinomio homogéneo de grado uno en las variables x_0, x_1 y x_2, nótese que ℓ está determinado por L salvo múltiplos constantes no cero.

Si $F = F(x_0, x_1, x_2)$ es un polinomio homogéneo de grado dos, el subconjunto

$$C = Z(F) = \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0; x_1; x_2) = 0\}$$

se denomina una cónica. F puede escribirse como:

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j+k=2} a_{jk} x_j x_k \qquad (a_{jk} = a_{kj})$$

Entonces el polinomio F es irreducible, o bien, es el producto de formas lineales. En el primer caso, la cónica C es irreducible, en el segundo caso, la cónica es reducible.

En el segundo caso la cónica es la unión de dos líneas $C = \{L_1 = 0\} \cup \{L_2 = 0\}$, y en este caso se dice que C es reducible. Las líneas $\{L_1 = 0\}$ y $\{L_2 = 0\}$ se denominan las componentes irreducibles de C,

En el caso en que $\{L_1 = 0\} = \{L_2 = 0\}$, como conjunto C es una línea, pero como curva algebraica la consideraremos como una línea doble, es decir, no es una línea, es una cónica. Podemos ver la representación de los distintos casos en la Figura (2.3)

Se puede determinar si la cónica es irreducible o no a partir de los coeficientes a_{jk} de la forma cuadrática que determina la cónica, concretamente tenemos:

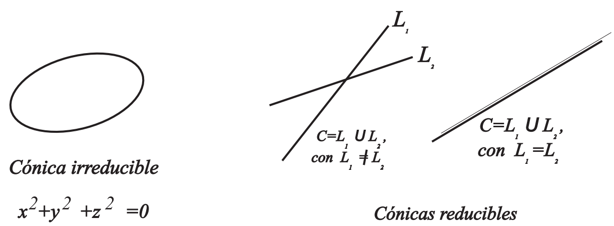

Figura 2.3. Cónicas

PROPOSICIÓN 2.2.5. *La cónica*

$$C := \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0; x_1; x_2) = \sum_{k,k=0}^{2} a_{jk} x_j x_k \qquad (a_{jk} = a_{kj})\}$$

es irreducible si y solamente si el determinante de la matriz A es distinto de cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Dejamos la demostración como ejercicio. □

Mientras que en $\mathbb{R}^2$ una línea y una cónica no necesariamente se intersectan, tenemos que en el plano proyectivo una cónica irreducible y una línea siempre se intersectan, y la intersección consta de, a lo más, dos puntos distintos. Cuando la intersección conste exactamente de un punto, diremos que esa línea es tangente a la cónica en ese punto, además, al igual que en $\mathbb{R}^2$, la línea tangente por el punto p es única y se suele denotar por T_pC.

En $\mathbb{R}^2$ distinguimos también los distintos tipos de cónicas no degeneradas, mediante el discriminante, esto es, si tenemos una ecuación de la forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde A, B, C, D, E y F son constantes, con A, B y C no todos nulos, el número $\Delta = 4AC-B^2$ recibe el nombre de característica de la ecuación y corresponde a una ecuación de tipo eliptico si $\Delta > 0$, parabólico si $\Delta = 0$ e hiperbólico si $\Delta < 0$.

En el plano proyectivo tenemos que:

Proposición 2.2.6. *Dos cónicas irreducibles pueden transformarse una en otra mediante una transformación proyectiva.*

Demostración. Bastará mostrar que cualquier cónica irreducible C es proyectivamente equivalente a la cónica $x_0x_2 - x_1^2 = 0$.

Consideremos tres puntos distintos p_0, p_2 y p_3 en C, y sea p_1 el punto de intersección de las rectas tangentes a C en los puntos p_0 y p_2. Como la cónica es irreducible, los puntos p_0, p_1, p_2 y p_3 se encuentran en posición general.

Entonces, existe una transformación proyectiva $T\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que: $T(p_0) = (1;0;0)$, $T(p_1) = (0;1;0)$, $T(p_2) = (0;0;1)$ y $T(p_3) = (1;1;1)$.

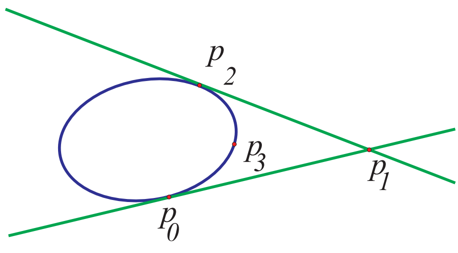

Figura 2.4. Cónicas

La cónica C' que pasa por los puntos $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ y $(1;1;1)$ debe satisfacer una ecuación de la forma:

$$\sum_{i+j+k=2} a_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k = 0$$

al resolver el sistema, podemos ver que C' está dada como

$$C' := \{(x_0;x_1;x_2) \mid x_0x_2 - x_1^2 = 0\} \qquad \square$$

Así, no hay distinción entre una elipse, una parábola y una hipérbola en el plano proyectivo complejo.

2.2.2. Curvas Reducibles e Irreducibles. Como sabemos, el anillo de polinomios con coeficientes en un campo $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ es un dominio de factorización única, luego entonces, el polinomio homogéneo F se descompone (en forma única salvo unidades y orden) como producto de polinomios homogéneos irreducibles

$$F = F_1^{n_1} \cdots F_s^{n_s}.$$

La curva F_j se denomina una componente irreducible de la curva plana F, y n_j se denomina su multiplicidad. Si $n_j \geq 2$, la curva $F_j^{n_j}$ se denomina una componente múltiple de F. Diremos que la curva F es irreducible, si F es un polinomio irreducible, si no es así, F se llama reducible.

Por ejemplo, si $F = F_1F_2^2$, donde $\deg F_1 = 3, \deg F_2 = 1$, entonces F es una curva quintica reducible, esta consta de dos componentes irreducibles F_1 y F_2, donde F_1 es simple y F_2 es una componente múltiple de multiplicidad dos.

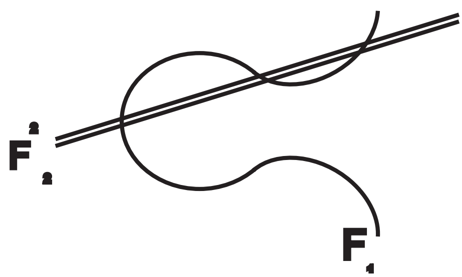

Figura 2.5. Quíntica reducible que consta de dos componentes, F_1 simple, F_2 múltiple.

Si $F = F_1^{n_1} \cdots F_s^{n_s}$, recordamos que

$$Z(F) = \{(x_0;x_1;x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0;x_1;x_2) = 0\}$$

entonces, como conjuntos, esto es, sin contar multiplicidades

$$Z(F) = Z(F_1) \cup \ldots \cup Z(F_s) = Z(F_1 \cdots F_s)$$

aunque, como curvas algebraicas, $Z(F)$ y $Z(F_1 \ldots F_s)$ son objetos distintos si $n_k \neq 1$ para alguna k, pues $Z(F)$ contiene componentes múltiples.

Las curvas planas tienen varias propiedades, enunciaremos a continuación una de ellas:

Como consecuencia del teorema de los ceros de Hilbert proyectivo tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2.2.7. *Si F es un polinomio de grado n, ($n \geq 1$) entonces*

- $Z(F) \neq \mathbb{P}^2$;
- $Z(F) \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [**F**, Capítulo 4] □

Por otra parte, como consecuencia del algoritmo de la división tenemos:

PROPOSICIÓN 2.2.8. *Si F y G son curvas planas tales que F no tiene componentes múltiples y $Z(F) \subset Z(G)$. Entonces el polinomio G es divisible por F.*

Si conocemos la relación que hay entre variedades e ideales podemos ver esto facilmente. Si $X \subset \mathbb{P}^n$, el ideal de X, que denotamos $I(X)$ se define como

$$I(X) := \{F \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]\,; F(P) = 0 \quad \text{para cada} \quad P \in X\}.$$

Supóngase que $Z(F) \subset Z(G)$ entonces $I(Z(G)) \subset I(Z(F))$, lo cual significa que $\sqrt{G} \subset \sqrt{F}$, como F no tiene componentes múltiples, $< F >= \sqrt{F}$, de donde $\sqrt{G} \subset < F >$. Ahora bien, como $G \in \sqrt{G}$, en particular, $G \in < F >$, por tanto, existe un polinomio A tal que $G = AF$.

Podemos también ver esto, utilizando coordenadas, haremos esto a continuación.

DEMOSTRACIÓN. Como $V(F) \neq \mathbb{P}^2$, podemos elegir un sistema de coordenadas homogeneas (x_0, x_1, x_2) tal que $(0, 0, 1) \notin Z(F)$. Podemos escribir:

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_0 x_2^n + a_1(x_0, x_1)_2^{n-1} + \ldots + a_n(x_0, x_1),\ a_0 \neq 0,$$

$$G(x_0, x_1, x_2) = b_0 x_2^m + b_1(x_0, x_1) x_2^{m-1} + \ldots + b_m(x_0, x_1),\ b_0 \neq 0.$$

Al considerar F y G como polinomios en la variable x_2 con coeficientes en el anillo $\mathbb{K}[x_0, x_1]$ y dividimos G por F, en particular, exiten polinomios homogeneos A y B tales que $G = AF + B$. Como $a_0 \neq 0$, podemos escribir

$$B = c_0 x_2^q + c_1(x_0, x_1) x_2^{q-1} + \ldots + c_q(x_0, x_1),\ q \leq n - 1$$

Como F no tiene componentes múltiples, tenemos que el discriminante de F, que denotamos $D_F(x_0, x_1)$ no es cero como polinomio en x_0, x_1.

Recordamos que $D_F(x_0, x_1) = a_0 R_{F,F'}(x_0, x_1)$.

donde $R_{F,F'}$ denota la resultante de F con su derivada. Si F y G denotan dos polinomios de grados n y m respectivamente, y coeficientes a_i, b_j como antes, entonces la resultante de F y G está dada como:

$$R_{F,G}(x_0,x_1) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

Si elegimos $(\lambda_0,\lambda_1) \in \mathbb{P}^1$ tal que $D(\lambda_0,\lambda_1) \neq 0$ existen números complejos ditintos $\lambda_{21},\dots,\lambda_{2n}$ tales que $F(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_{2j}) = 0$, para $1 \leq j \leq n$. Por hipótesis $Z(F) \subset Z(G)$, por lo que $G(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_{2j}) = 0$, así $B(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_{2j}) = 0$, por lo que:

$$c_0 = c_1(\lambda_0,\lambda_1) = \dots = c_q(\lambda_0,\lambda_1) = 0.$$

Como esto se cumple para cualquier punto en la línea proyectiva, salvo quizá un número finito de puntos, entonces $c_0 = \dots = c_q = 0$, es decir, $B = 0$. $\square$

Como consecuencia de este último resultado tenemos que dos curvas planas, sin componentes múltiples, coinciden si y solamente si, los polinomios homogéneos que las determinan, coinciden salvo unidades.

2.2.3. Multiplicidad de la Curva en un Punto. Si F es una curva plana, y $p = (0;0;1) \notin Z(F)$, entonces podemos escribir F como un polinomio en la variable x_2 con coeficientes en el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_0,x_1]$, esto es:

$$F(x_0,x_1,x_2) = a_0(x_0,x_1)x_2^n + a_1(x_0,x_1)x_2^{n-1} + \dots + a_n(x_0,x_1),$$

donde $(a_0(x_0,x_1) = a_0 \neq 0)$, luego entonces, para cualesquier punto $q = (\lambda_0,\lambda_1,0)$ sobre el eje x, como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, la ecuación

$$a_0x^n + a_1(\lambda_0,\lambda_1)x^{n-1} + \cdots + a_n(\lambda_0,\lambda_1) = 0$$

tiene n soluciones contando multiplicidad, lo cual significa que $Z(F)$ y la línea que une los puntos p y q, que denotaremos $\overline{pq}$, se cortan (como conjuntos) al menos una vez y a lo más n.

El hecho de que en $\mathbb{P}^2$ una línea y una curva de grado n se intersecten en n puntos, contando multiplicidades, es una propiedad proyectiva.

Además una curva plana $Z(F)$ es un conjunto cerrado, aún más, como consecuencia de la propiedad anterior, es nunca denso.

Sea F una curva plana y $p \in Z(F)$. Podemos escoger un sistema de coordenadas homogéneas $(x_0; x_1; x_2)$ tal que $\ell_2 = \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_2 = 0\} \not\subset Z(F)$ y $P = (0; 0; 1)$. Sea $f(x, y) = F(x, y, 1)$ la curva afín correspondiente a F. Entonces

$$f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \ldots + f_n(x, y), \qquad (m \geq 1)$$

donde $f_k(x, y)$ es la parte homogénea de grado k de f y $f_m(x, y) \neq 0$ como polinomios.

El entero m se denomina la *multiplicidad de la curva F en el punto p* y se denota $m_p(F)$. Este número es independiente de la elección de coordenadas.

Definición 2.2.9. Diremos que F es no singular en p si $m_p(F) = 1$, de otra forma diremos que F tiene un punto singular (o múltiple) en p.

Si denotamos por $SingF$ el conjunto de todos los puntos singulares de F, entonces $SingF$ no es finito si, y sólo si, F tiene una componente múltiple.

Ejemplo 2.2.10.

1. Si $F(x, y, z) = y^2 z - x^3 + z^2 x$, o si preferimos, la curva afín correspondiente a F es $f(x, y) = F(x, y, 1) = y^2 - x^3 + x$. Entonces $p = (0, 0, 1)$ está en la curva, pues $F(0, 0, 1) = 0 - 0 + 0 = 0$, y $f_1(x, y, 1) = x$, por lo que $m_p = 1$, así P es un punto no singular.
2. Si $H(x, y, z) = x^2 z - y^3$, entonces $P = (0, 0, 1)$ es un punto singular, pues $h(x, y) = H(x, y, 1) = x^2 - y^3$, así $h_1(x, y) = 0$, $h_2(x, y) = x^2$, y $m_P = 2$.

Definición 2.2.11. Una curva plana sin puntos singulares se denomina una curva plana no singular. De otra forma, la curva se llama curva plana singular, o simplemente, curva singular.

Ejemplo 2.2.12. La curva definida por el polinomio $f(x, y, z) = x + y + z$ es no singular, mientras que la curva definida por el polinomio $g(x, y, z) = xyz$ es singular.

Si F denota una curva plana, $p \in Z(F)$ y $f(x, y) = F(x, y, 1)$ denota la curva afín correspondiente a F, tenemos que

$$f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \ldots + f_n(x, y), \qquad (m \geq 1)$$

Factoricemos $f_m(x, y)$ en polinomios lineales (homogéneos) distintos, esto es

$$f_m(x, y) = (a_1 x + b_1 y)^{n_1} \cdots (a_s x + b_s y)^{n_s}, \qquad \left(\sum n_j = m\right)$$

La cerradura de la línea afín $\{(x, y) \mid (a_j x + b_j y)^{n_j} = 0\}$ en $\mathbb{P}^2$ se denomina *la línea tangente a F en p*. El número n_j se denomina *la* *multiplicidad de la línea tangente.* Si p es un punto no singular de F, la línea tangente a F en p es única, y se denota por T_pF. Si $m_p(F) \geq 2$ y cada $n_j = 1$, entonces p se llama un *punto singular ordinario de multiplicidad* m. Un punto doble ordinario se denomina un *nodo.*

Otro caso extremo es cuando F es irreducible en p y $m = m_p(F) \geq 2$, p se denomina una *cúspide.* En este caso $f_m(x, y) = (a_1x + b_1y)^m$, así hay una única tangente con multiplicidad m.

Otra serie de propiedades interesantes de las curvas planas son las relacionadas con las líneas tangentes:

Teorema 2.2.13 (La igualdad de Euler).

1. $x_0\partial_0F + \ldots + x_r\partial_rF = nF$.
2. $\sum_{j,k} x_jx_k\partial_j\partial_kF = n(n-1)F$.
3. *En general* $(x_0\partial_0 + \ldots + x_r\partial_r)^kF = \binom{n}{k}F$.

Demostración. Dejamos como ejercicio verificar este resultado □

En particular tenemos que un punto p es singular si y sólo si $\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) = 0$ para $1 \leq k \leq r$. De manera similar al caso euclidiano, en un punto no singular $p \in \mathbb{P}^2$ la línea tangente a F en p está determinada por la ecuación

$$T_pF : \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p)\right) x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p)\right) x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(p)\right) x_2 = 0.$$

Ejemplo 2.2.14. Si consideramos la curva $F : x_0x_1 - x_2^2 = 0$ definida en el plano proyectivo complejo, podemos ver que el punto $P = (1, 1, 1)$ pertenece a esta curva, además $\partial_0F = x_1, \partial_1F = x_0$, y $\partial_2F = 2x_2$, por lo que, el plano tangente a F en el punto P satisface la ecuación:

$$T_pF : x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$$

2.3. El teorema de Bezout

Para demostrar el teorema de Bezout nos basamos en el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1. *Si* $\mathbb{K}$ *es un campo, y* $T_1, \ldots, T_n$ *son subconjuntos infinitos de* $\mathbb{K}$, *y* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *es un polinomio en* n *variables. Si* $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ *para toda* $a_i \in T_i$, *entonces* $f = 0$

La demostración se hace por inducción en el número de variables.

Este resultado tiene como consecuencia que dos curvas planas, que no tengan componentes comunes se corten sólo en un número finito de puntos. Esto es:

Proposición 2.3.2. *Si* F *y* G *son dos curvas proyectivas planas de grados* n *y* m *respectivamente que no tienen componentes comunes, entonces* $V(F) \cap V(G)$ *es un conjunto finito de puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Como $V(F) \neq \mathbb{P}^2$ podemos elegir un sistema de coordenadas tal que $(0,0,1) \notin V(F)$, y considerando F y G como polinomios en $(\mathbb{K}[x,y])[z]$, tenemos:

$$F(x,y,z) = a_0 z^n + a_1(x,y)z^{n-1} + \ldots + a_n(x,y), \quad a_0 \neq 0,$$

y

$$G(x,y,z) = b_0 z^m + b_1(x,y)z^{m-1} + \ldots + b_m(x,y), \quad b_0 \neq 0.$$

Como consecuencia del algoritmo de la división, tenemos que existen polinomios $Q, R \in (\mathbb{K}[x,y])[z]$,con $0 \leq \deg R < \deg F = n$ tales que $G = QF + R$. Si R es el polinomio cero, entonces $G = QF$, por lo que $V(F) \subset V(G)$, lo cual no es posible ya que, por hipótesis F y G no tienen componentes comunes. Por lo que $R \neq 0$, como polinomio. En particular $R = c_0 z^r + c_1(x,y)z^{r-1} + \ldots c_r(x,y)$ con $c_0 \neq 0$ y $r = \deg R \leq n-1$.

Como R no es el polinomio cero, existe $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{A}^2$ tal que, $c_j(\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$ para algún j. En particular $c_j(\lambda_0, \lambda_1, z) \in \mathbb{K}[z]$ es el polinomio no nulo. Por lo que sólo toma el valor cero para un número finito de valores $\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2r}$. En particular $R(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{2j}) = 0$ para cualquier valor $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{P}^1$ donde el discriminante de F no sea cero como polinomio. Por hipótesis $G(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{2j}) = 0$ para $1 \leq j \leq n$. Esto es $R(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{2j}) = 0$, para $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{P}^1$salvo para un número finito de puntos. En particular $c_0 = c_1 = \ldots = c_q = 0$, lo cual es una contradicción. □

DEFINICIÓN 2.3.3. Si $P \in \mathbb{A}^2$, F y G son dos curvas planas en $\mathbb{A}^2$, diremos que F y G se intersectan propiamente en P si no tienen componentes comunes en P

EJEMPLO 2.3.4. Por ejemplo las curvas $F : x_0 = 0$ y $G := x_1 = 0$ se intersectan propiamente en $P = (0;0;1)$

DEFINICIÓN 2.3.5. Si F y G son curvas planas en $\mathbb{A}^2$, y P es un punto en $\mathbb{A}^2$, el número de intersección de F y G en P, que denotaremos $I_P(F,G)$ es el número entero que satisface las siguientes propiedades:

1. $I_P(F,G) \geq 0$ si F y G se intersectan propiamente en P.
2. $I_P(F,G) = \infty$ si, y sólo si F y G no se intersectan propiamente en P.
3. $I_P(F,G) = 0$ si y sólo si $P \notin V(F) \cap V(G)$.
4. Si $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ es un cambio de coordenadas, entonces
$$I_{T(P)}(F^T, G^T) = I_P(F,G)$$
5. $I_P(G,F) = I_P(G,F)$.
6. $I_P(F,G) \geq m_P(F)m_P(G)$, y la igualdad se da si, y sólo si F y G no tienen tangentes comunes en P.
7. Si $F = \prod F_j^{r_j}$ y $G = \prod G_k^{s_k}$ entonces $I_P(F,G) = \sum_{j,k} r_j s_k I_P(F_j, G_k)$.
8. Para cualquier $A \in \mathbb{K}[x,y]$ se tiene que $I_P(F,G) = I_P(F, G + AF)$.

9. $I_p(F,G) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/ < F, G >= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x,y]/ < F, G >$.
10. Si p es un punto simple de F, entonces
$$I_p(F,G) = ord_P^F(G) := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(F)/\langle G\rangle.$$
11. Si F y G no tienen componentes comunes
$$\sum_P I_P(F,G) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x,y]/\langle F,G\rangle.$$

Propiedades similares se cumplen para curvas proyectivas planas.

TEOREMA 2.3.6. *Sean F y G dos curvas proyectivas planas de grados m y n respectivamente, y supongamos que F y G no tienen componentes comunes, entonces:*
$$\sum_{P\in V(F)\cap V(G)} I_P(F,G) = \deg G \deg F.$$

En particular $V(F)\cap V(G) \neq \emptyset$.

Como F y G no tienen componentes múltiples, entonces $V(F)\cap V(G)$ es finito, por lo que, podemos elegir un sistema de coordenadas proyectivas (x,y,z) que $V(F)\cap V(G)\cap V(z) = \emptyset$. Luego entonces, como consecuencia de la propiedad 11 antes enunciada tenemos que
$$\sum_{P\in V(F)\cap V(G)} I_P(F,G) = \sum_{P\in V(F_*)\cap V(G_*)} I_P(F_*,G_*) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{K}[x,y]/\langle F_*,G_*\rangle.$$

Bastará demostrar que
$$\dim \mathbb{K}[x,y]/\langle F_*,G_*\rangle = \dim_d \mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle = mn$$

PASO 1. *Demostraremos que* $\dim_d \mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle = mn$ *si* $d \geq m+n$.

Sea $\pi : \mathbb{K}[x,y,z] \to \mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle$ la proyección natural, en particular, tenemos que π es epimorfismo, y $\ker\pi = \langle F,G\rangle$.

Definamos $\varphi : \mathbb{K}[x,y,z]\times\mathbb{K}[x,y,z] \to \mathbb{K}[x,y,z]$ el morfismo definido como $\varphi(A,B) = AF+BG$. Es claro que $Im\varphi =< F,G >$. Además, $\ker\varphi = \{(A,B); AF = -BG\}$. Finalmente, definamos $\psi : \mathbb{K}[x,y,z]\to\mathbb{K}[x,y,z]\times\mathbb{K}[x,y,z]$ como $\psi(C) = (GC,-FC)$. Como F y G no tienen factores comunes, ψ es inyectiva, y podemos ver facilmente que $Im\psi\subset\ker\varphi$. Tenemos así la siguiente sucesión exacta.
$$0\to\mathbb{K}[x,y,z]\to\mathbb{K}[x,y,z]\times\mathbb{K}[x,y,z]$$
$$\to\mathbb{K}[x,y,z]\to\mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle\to 0.$$

Restringiendo a grados apropiadamente que
$$0\to\mathbb{K}_{d-m-n}[x,y,z]\to\mathbb{K}_{d-m}[x,y,z]\times\mathbb{K}_{d-n}[x,y,z]$$
$$\to\mathbb{K}_d[x,y,z]\to\mathbb{K}_d[x,y,z]/\langle F,G\rangle\to 0.$$

Como $\dim \mathbb{K}_e[x,y,z] = \frac{(e+1)(e+2)}{2}$ para cada $e \geq 1$, como consecuencia del teorema del rango tenemos que, si $d \geq m+n$ entonces:

$$\dim \frac{\mathbb{K}_d[x,y,z]}{\langle F,G\rangle} = \dim \mathbb{K}_d[x,y,z] - \dim \mathbb{K}_{d-m}[x,y,z] \times \mathbb{K}_{d-n}[x,y,z] \\ + \dim \mathbb{K}_{d-m-n}[x,y,z].$$

Luego entonces

$$\dim \frac{\mathbb{K}_d[x,y,z]}{\langle F,G\rangle} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \\ - \left[\frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} + \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2}\right] \\ + \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2} = mn$$

PASO 2. *El homomorfismo*

$$\alpha\colon \mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle \to \mathbb{K}[x,y,z]/\langle F,G\rangle$$

definido como $\alpha([H]) = [zH]$ es inyectivo.

Supongamos que $zH \in \langle F,G\rangle$, debemos demostrar ahora que: $H \in \langle F,G\rangle$.

Si $J \in \mathbb{K}[x,y,z]$, $J_0(x,y) := J(x,y,0)$. Como $V(F)\cap V(G)\cap V(z) = \emptyset$, entonces F_0 y G_0 son primos relativos en $\mathbb{K}[x,y]$. Como $zH = AF + BG$, entonces $0 = A_0F_0 + B_0G_0$. Como F y G no tienen componentes comunes, existe algún $C \in \mathbb{K}[x,y]$ tal que $B_0 = F_0C$ y $A_0 = -G_0C$. Definamos $A_1 := A + CG$ y $B_1 := B - CF$, entonces $(A_1)_0 = (B_1)_0 = 0$, por tanto, existen $A', B' \in \mathbb{K}[x,y,z]$ tales que $A_1 = zA'$ y $B_1 = zB'$. Como $zH = A_1F + B_1G = zA'F + zB'G$, tenemos que $H = A'F + B'G$, es decir α es un monomorfismo.

Además, si $d \geq n+m$,

$$\dim \mathbb{K}_d[x,y,z]/ < F,G >= \dim \mathbb{K}_{d+1}[x,y,z]/ < F,G >,$$

por lo que $\alpha_{|\mathbb{K}_d[x,y,z]/<F,G>} : \mathbb{K}_d[x,y,z]/ < F,G > \to \mathbb{K}_{d+1}[x,y,z]/ < F,G >$ es sobre, y en particular, es un isomorfismo.

PASO 3. *Si $d \geq m+n$, y $A_1,\dots,A_{mn} \in \mathbb{K}_d[x,y,z]$ son tales que sus residuos en $\mathbb{K}_d[x,y,z]/ < F,G >$ son base. Si $A_{i*} = A_i(x,y,1) \in \mathbb{K}[x,y]$ y si a_i denota el residuo de $A_{i*} \in \mathbb{K}_d[x,y]/ < F_*,G_* >$. Entonces $a_1,\dots,a_{mn}$ son una base de $\mathbb{K}_d[x,y]/ < F_*,G_* >$.*

Como $\alpha_{|\mathbb{K}_d[x,y,z]/<F,G>}$ es un isomorfismo si $d \geq m+n$ entonces los residuos $z^rA_1,\dots,z^rA_{mn}$ forman una base de $\mathbb{K}_{d+r}[x,y,z]/ < F,G >$ para toda $r \geq 0$.

Las a_i generan $\mathbb{K}_d[x,y]/ < F_*,G_* >$. Si $h = [H] \in \mathbb{K}[x,y]/ < F_*,G_* >$, con $H \in \mathbb{K}[x,y]$, para algún $N \geq 0$ tenemos que z^NH^* es una forma de grado $d+r$, por lo que $z^N H^* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^r A_i + BF + CG$. Por ende $h = \sum \lambda_i a_i$.

Las a_i son linealmente independientes en $\mathbb{K}_d[x,y]/ < F_*, G_* >$. Si $0 = \sum \lambda_i a_i$, entonces $\sum \lambda_i A_i = BF_* + cG_*$, en particular, existen r, s, t tales que $z^r \sum \lambda_i A_i = z^s BF_* + z^t CG_*$.

Entonces $\sum \lambda_i [z^r A_i] = 0 \in \mathbb{K}_{d+r}[x,y,z]/ < F, G >$, y como las $[z^r A_i]$ constituyen una base, tenemos que $\lambda_i = 0$.

PROPOSICIÓN 2.3.7. *Si F y G no tienen componentes comunes, entonces*

$$\sum_P m_P(F) m_P(G) \leq \deg(F)\deg(G).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $I_P(F,G) \geq m_P(F)m_P(G)$, entonces

$$\deg(F)\deg(G) = \sum_p I_P(F,G) \geq \sum_P m_P(F)m_P(G). \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 2.3.8. *Si F y G son curvas de grados n y m respectivamente, y si se intersectan en mn puntos distintos, estos puntos son simples sobre F y G.*

DEMOSTRACIÓN. Como consecuencia de lo anterior, $m_P(F)m_P(G) = 1$ para cada $P \in V(F) \cap V(G)$, de donde $m_P(F) = m_P(G) = 1$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.9. *Si dos curvas de grados m y n respectivamente tienen más de mn puntos en común, entonces tienen una componente en común.*

PROPOSICIÓN 2.3.10. *Si $F = F_1F_2$, es una curva plana, entonces cada punto de $V(F_1) \cap V(F_2)$ es un punto singular de F. En particular, una curva plana no singular es irreducible.*

PROPOSICIÓN 2.3.11. *Si F es una curva plana y $p \in V(F)$, entonces:*

1. $m_P(F) = \min\{I_P(F,L); L$ es una línea que pasa por $p\}$.
2. $I_P(F,L) > m_P(F)$ *si, y sólo si L es una línea tangente a F en P.*

EJEMPLO 2.3.12. 1. Si $F(x,y,z) = xz^2 - y^3$ y $P = (1,0,0)$, entonces $F(1,y,z) = z^2 - y^3$, por lo que $m_P(F) = 2$, es decir, P es un punto singular para F. y $x = 0$ es una tangente doble. Si $L(x,y,z) = x$ entonces $V(F) \cap V(L) = \{(0,0,1)\}$, por lo que $I_P(F,L) = 3$, además $I_P(F,L') = m_P(L') = 2$ si $L' \neq L$ F en P.

2. Si $F(x,y,z) = z^3 - xy^2$, $G(x,y,z) = y^3 - xz^2$, entonces $Sing(F) = Sing(G) = \{(1,0,0)\}$, como $F(1,y,z) = z^3 - y^2$ entonces $m_P(F) = 2$. Análogamente, $G(1,y,z) = y^3 - z^2$, entonces $m_P(G) = 2$. La tangente a F en P está dada como $y^2 = 0$, mientras que la tangente a G en P está dada por $z^2 = 0$. Como F y G no comparten tangentes comunes, entonces $I_P(F,G) = m_P(F)m_P(G) = 4$. Además, $V(F) \cap V(G)$ consta

de los puntos $P = (1,0,0), O = (1,1,1)$ y $Q_k = (e^{(i\frac{6k\pi}{5})}, e^{(i\frac{2k\pi}{5})}, 1)$ con $k = 1,2,3,4$

Como consecuencia del teorema de Bezout

$$9 = \deg F \deg G = I_P(F,G) + I_O(F,G) + \sum_{k=0}^{4} I_{Q_k}(F,G).$$

Como $I_P(F,G) = 4$, en particular, $I_O(F,G) = 1$ y $I_{Q_k}(F,G) = 1$.

Definición 2.3.13. Un punto no singular P para una curva plana irreducible F de grado $n \geq 3$ se denomina un punto de inflexión (flex) si $I_P(F, T_PF) \geq 3$. El punto se llama un punto de inflexión ordinario si $I_P(F, T_PF) = 3$. Si $r = I_P(F, T_PF) - 2$, entonces r se denomina el orden del punto de infelxión P.

Si

$$Hess(F) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix}$$

entonces $Hess(F)$ es un polinomio homogeneo de grado $3(n-2)$, y se denomina el Hessiano de F.

Proposición 2.3.14. *Si F es una curva plana irreducible, $P \in V(F)$, es un punto de inflexión si, y sólo si $Hess(F)(P) = 0$.*

Demostración. Podemos elegir un sistema de coordenadas (X, Y, Z) tal que $P = (1,0,0)$ y $T_PF = \{z = 0\}$. Sea $x = Y/X, y = Z/X$, y $f(x,y) = F(1,x,y)$.

Entonces

$$f(x,y) = y(a + bx + cy + (\text{términos de grado } \geq 2) + dx^2 + h(x)$$

con $a \neq 0$, b, c, d constantes, y h un polinomio que no tiene términos de grado menor o igual que 2. Como $F(X,Y,Z) = X^n f(x,y)$, entonces

$$Hess(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (n-1)a \\ 0 & 2d & b \\ (n-1)a & b & 2c \end{vmatrix} = -2(n-1)^2 a^2 d.$$

Pero $Hess(F)(P) = 0$ si y sólo si $d = 0$, esto es, si P es un punto de inflexión.

Proposición 2.3.15. *Una curva plana no singular de grado $n \geq 3$ tiene al menos uno, y a lo más $3n(n-2)$ puntos de inflexión.*

2.4. Curvas analíticas

Por otra parte, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, una curva afín, o proyectiva es, casi en todas, homeomorfa a un abierto de $\mathbb{C}$, esto nos conduce a dotar a las curvas de una estructura analítica.

DEFINICIÓN 2.4.1. Un germen de curva analítica en P es una clase de equivalencia de funciones holomorfas f definidas en una vecindad de P con $f(P) = 0$, por la siguiente relación: f y g son equivalentes en P que denotaremos $f \sim_P g$ (P), si existe una función holomorfa en una vecindad U de P tal que $g = fh$. Denotaremos el germen de f como $\{f = 0\}$.

En particular, podemos considerar a f como un elemento del anillo de series de potencias convergentes $\mathbb{C}\{x, y\}$, el cual es un dominio de factorización única, por lo que f puede descomponerse en factores irreducibles

$$f = f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$$

Así, $\{f = 0\}$ tiene ramas irreducibles $\{f_1\}, \ldots, \{f_s\}$ en P con multiplicidades $n_1, \ldots, n_s$.

Todo germen de curva analítica en P $\{f = 0\}$, tiene asociado un parámetro de uniformización local t, esto es, existe un disco $\Delta(0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \epsilon\}$ y una aplicación holomorfa $\phi : \Delta(0, \epsilon) \to \mathbb{P}^2$ tal que $\phi(0) = P$, $\phi^{-1}(P) = \{0\}$, y ϕ es una biyección de $\Delta(0, \epsilon)$ en $\{f = 0\}$.

EJEMPLO 2.4.2. Si $f(x, y) = x^a - y^b$, con a y b primos relativos, entonces $\phi(t) = (t^b, t^a)$ es una parámetro de uniformización.

LEMA 2.4.3. *Si $\{f = 0\}$ es un germen de curva analítica en P, entonces:*

1. *Existe una parámetro de uniformizaicón local ϕ tal que $\phi(t) = (t^m, v(t))$, donde $h(t)$ es una función holomorfa tal que $v(0) = 0$, y*
2. *Existe un polinomio irreducible*

$$R(x, y) = y^m + a_1(x)y^{m-1} + \ldots + a_m(x), \quad (a_j(x) \in \mathbb{C}\{x\})$$

tal que $\{f = 0\} = \{R = 0\}$

DEMOSTRACIÓN. Primeramente, supongamos que $\phi(t) = (u(t), v(t))$ donde $u(0) = v(0) = 0$, y $m = ord_0 u(t)$, el orden del cero de u en $t = 0$.

Entonces u admite una expansión en serie de potencias de la forma:

$$u(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k, \quad (a_m \neq 0)$$

Sea $s = t\sqrt[m]{\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k}$ en una rama apropiada de logaritmo. Entonces t es una función holomorfa de s, por lo que s es un parametro local de $\{f = 0\}$ tal que

$$(\phi \circ t)(s) = (s^m, (v \circ t)(s)).$$

Para la segunda parte, si $\phi(t) = (t^m, v(t))$ es un parámetro de uniformización local, si $\epsilon := exp(2\pi\imath/m)$ es una raíz $m-$ésima de la unidad, definimos

$$\begin{aligned} R(x, y) &:= \prod_{j=0}^{m-1} (y - v(\epsilon^j x^{1/m})) \\ &= y^m + a_1(x)y^{m-1} + \ldots + a_m(x) \end{aligned}$$

donde $x^{1/m}$ es una raíz $m-$ésima de x. Las funciones $a_k(x)$ son holomorfas en x, esto es,

$$a_1(x) = -v(x^{1/m}) - v(\epsilon x^{1/m}) - \ldots - v(\epsilon^{m-1} x^{1/m})$$

es una función holomorfa de $x^{1/m}$ invariante bajo la acción $x^{1/m} \mapsto \epsilon^j x^{1/m}$.

Por construcción $\{f = 0\} = \{R = 0\}$. Si $R = R_1 R_2$ en $\mathbb{C}\{x\}$, entonces el germen de curva analítica $\{f = 0\}$ no es irreducible, lo cual sería una contradicción. $\square$

Capítulo 3

Superficies de Riemann

3.1. Fundamentos

En esta parte, recordamos lo que es una superficie de Riemann.

DEFINICIÓN 3.1.1. Una superficie de Riemann S es un espacio topológico junto con una colección $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de cartas coordenadas, esto es, cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ es un homeomorfismo de un abierto de S en un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es analítica cuando esta se encuentra definida.

EJEMPLO 3.1.2. 1. $\mathbb{P}^1$ es una superficie de Riemann, donde la proyección estereográfica da las cartas coordenadas.

2. Si $S = Z(x^2 - y)$ cualquier punto lo podemos escribir como $x = t, y = t^2$ con $t \in \mathbb{C}$. Por lo que, esta curva afín es una superficie de Riemann.

Si M_1 y M_2 son dos superficies de Riemann, una aplicación holomorfa $F : M_1 \to M_2$ es una aplicación continua tal que, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (W_β, φ_β) son cartas de M_1 y M_2 respectivamente, entonces $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es analítica donde esta se encuentra definida.

En la siguiente sección demostraremos que a toda curva proyectiva podemos asociarle una superficie de Riemann

3.2. Superficies de Riemann asociadas a curvas algebraicas

Con el fin de tener un panorama un poco más completo del problema que aquí se trabaja, a continuación daremos un esbozo de cómo se construye la superficie de Riemann asociada a una curva singular.

TEOREMA 3.2.1. *Si C es una curva irreducible en $\mathbb{P}^2$, entonces existe un modelo no singular $\varphi : S \to C$, esto es, S es una superficie de Riemann compacta, y ϕ es una función holomorfa tal que:*

1. $\phi(S) = C$
2. $\phi : S \setminus \phi^{-1}(Sing(C)) \to C \setminus Sing(C)$ *es un biholomorfismo.*

Además S es única salvo biholomorfismos.

DEMOSTRACIÓN. Si $Sing(C) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ y U_j es una vecindad de P_j tal que

$$C \cap U_j = C_{j1} \cup \ldots C_{jk_j}$$

sea una descomposición irreducible de la curva C en el punto P_j, podemos suponer que $U_j \cap U_k = \emptyset$ si $j \neq k$ y que $C_{j\nu} \cap C_{j\mu} = \{P_j\}$ si $\nu \neq \mu$. Consideremos $\phi_{j\nu} : D_{j\nu} \to U_j$ un parámetro de uniformización local de $C_{j\nu}$ en P_j y tal que $\phi_{j\nu}(D_{j\nu}) = C_{j\nu}$ para $1 \leq \nu \leq k_j$.

Consideremos ahora el conjunto

$$\tilde{S} = (C \setminus Sing(C)) \cup (\bigcup_{j,\nu} D_{j\nu})$$

Nótese que $\tilde{S}$ no necesariamente es una variedad conexa de dimensión uno, necesitamos pegar algunas objetos en $\tilde{S}$, para lo cual consideraremos la siguiente relación de equivalencia:

Fuera de $D_{j\nu}$ no tenemos problemas, y todo punto está relacionado sólo con el mismo.

Un punto $P \in C \setminus Sing(C)$ se relaciona con $Q \in D_{j\nu}$, es decir $P \sim Q$ si $P \in C_{j\nu}$ y $\phi_{j\nu}(Q) = P$.

Si $S = \tilde{S}/\sim$, y $\pi : \tilde{S} \to S$ es la proyección natural, entonces S es un espacio Hausdorff bajo la topología inducida, las coordenadas locales de $\pi(C \setminus Sing(C))$ son las de $C \setminus Sing(C)$ y las de $\pi(D_{j\nu})$ son las de $D_{j\nu}$, finalmente se define $\tilde{\phi} : \tilde{S} \to C$ como $\phi(P) = P$, si $P \in C \setminus Sing(C)$, y si $P \in D_{j\nu}$, entonces $\tilde{\phi}$ induce una aplicación holomorfa $\phi : S \to C$.

El género de una curva irreducible en $\mathbb{P}^2$, es el género de su modelo no singular, si el género es cero, la curva se llama racional, y si es uno, se denomina curva elíptica.

3.3. La fórmula del género

Regresando a nuestro problema, en ésta sección nos dedicaremos a resolver nuestra pregunta original:

Dada una curva algebraica $F(x_0, x_1, x_2) = 0$*, ?'Cómo podemos determinar su género?*

Hay varias formas de resolver este problema, a continuación daremos un argumento topológico que nos servirá en el caso en que la curva no tiene puntos singulares.

Supongamos que $C \subset \mathbb{P}^2$ es una curva suave de grado d, entonces

$$C = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

donde F es un polinomio homogéneo de grado d, y $\nabla F(0) \neq (0,0,0)$ para toda $p \in C$, donde $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2})$

Tomemos un punto $P \in \mathbb{P}^2 \setminus C$, y una línea $\ell \subset \mathbb{P}^2$, tal que $P \notin \ell$, después de un cambio de coordenadas podemos suponer

$$P = (0,0,1), \quad \ell = \{z \in \mathbb{P}^2 \mid x_2 = 0\}$$

aún más, podemos suponer que la línea ℓ , la cual corresponde a la línea “al infinito" no es tangente a la curva C

Consideremos la proyección con centro en P, $\pi_P : C \to \ell \simeq \mathbb{P}^1$, la cual consiste en proyectar un punto $Q \in C$ a la recta ℓ, esto es, $\pi_P(Q) = \ell \cap (\overline{PQ})$, como se muestra en la Figura (3.1).

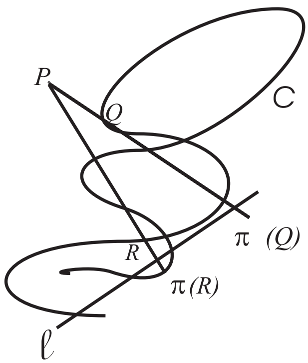

Figura 3.1. La proyección π_p con centro en p.

En el conjunto $U_2 := \{(x_0;x_1;x_2) \mid x_2 \neq 0\}$ podemos expresar lo anterior en términos de las coordenadas afines, $z_1 = x_0/x_2, z_2 = x_1/x_2$, y en $\mathbb{C}^2 \simeq U_2 \subset \mathbb{P}^2$, tenemos la ecuación $f(z_1, z_2) = F(z_1, z_2, 1) = 0$.

En una vecindad de un punto $Q \in C$, si f satisface la condición $(\partial f/\partial z_2)\,(Q) \neq 0$, la variable z_1 puede verse como una coordenada local, por lo cual la aplicación no se ramifica; pero si $(\partial f/\partial z_2)(Q) = 0$, como la curva f es no singular, $(\partial f/\partial z_1)(Q) \neq 0$, de donde, z_2 puede verse como coordenada local sobre C en una vecindad del punto Q. De aquí podemos suponer que $z_1 = z_1(z_2)$, de donde

$$f(z_1, z_2) = f(z_1(z_2), z_2) = 0$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial z_2} = 0 \quad \text{sobre } C$$

Como C es no singular, $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ no pueden anularse simultáneamente, así el orden de anulamiento de $\frac{\partial z_1}{\partial z_2}$ en Q, que denotaremos $v(Q)-1$, es igual al orden de $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ en $Q \in C$. [1] [2]

Como la curva $(\frac{\partial f}{\partial z_2}=0) \subset \mathbb{P}^2$ tiene grado $d-1$, como consecuencia del teorema de Bezout, el número de intersección de la curva C con $(\frac{\partial f}{\partial z_2}=0)$ está dado como $\deg(C)\cdot\deg(\frac{\partial f}{\partial z_2}) = d(d-1)$; aún más, como los puntos de $C \cap (\frac{\partial f}{\partial z_2}=0)$ están en el plano U_2, tenemos que

$$\sum_{q\in C}(v(Q)-1) = d(d-1)$$

Si nuevamente aplicamos el teorema de Bezout a la curva C y la línea $\overline{PQ}$, para un punto q general, tenemos que el número de hojas de π_P es d. Esto es, $[C] = d\cdot[\ell]$ en $H^2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Z})$.

Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz a $\pi_P : C \to \ell \simeq \mathbb{P}^1$, tenemos que:

$$\chi(C) = d\cdot\chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{Q\in C}(v(Q)-1)$$

Como la característica de Euler de la curva C está dada por $\chi(C) = 2-2g(C)$, donde $g(C)$ denota el género de C, $\chi\mathbb{P}^1 = 2$, y $\sum(v(Q)-1) = d(d-1)$, entonces $2g(C) = 2-2d+d(d-1) = (d-1)(d-2)$, por lo cual podemos concluir que:

Proposición 3.3.1 (Fórmula del género para curvas planas no singulares.). *Si F es un polinomio homogéneo irreducible de grado d, tal que $C = Z(F)$ es una curva no singular, entonces el género de la curva C está dado en términos del grado del polinomio F como*

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Nótese que dado un entero $d \geq 1$, siempre podemos encontrar una curva plana no singular de grado d, a saber, la curva $C := (x;y;z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^d+y^d+z^d=0\}$. También podemos notar que usando sólo curvas no singulares, no podemos obtener una curva de género arbitrario, por ejemplo, no podemos obtener curvas planas no singulares de género 2, pues en éste caso deberíamos tener un entero positivo d, que satisfaga la ecuación $4 = (d-1)(d-2)$, lo cual no es posible.

[1] El orden de anulamiento de $\frac{\partial z_1}{\partial z_2}$ en Q es, el número de ramificación de π_P en Q menos uno, y se denota con el símbolo $v(Q)-1$.

[2] El orden de $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ en $Q \in C$ es la multiplicidad de intersección de la curva C con la curva $(\frac{\partial f}{\partial z_2}=0)$ en el punto Q.

Para grado menor o igual a ocho sólo son admisibles los siguientes valores para el género:

grado	género	grado	género
1	0	2	0
3	1	4	3
5	6	6	10
7	15	8	21

debido a esto, es necesario admitir curvas planas con puntos singulares.

Una versión más general de la fórmula del género es la siguiente:

TEOREMA 3.3.2 (La fórmula del género). *Si C es una curva plana irreducible de grado d, $\varphi : S \to C$ es un modelo no singular de C, y si g denota el género de la superfice de Riemann compacta S, entonces*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in Sing(C)} \delta_P,$$

donde el número δ_P mide "qué tan complicada es la singularidad en P".[3]

Denotemos por $\varphi : S \to C$ el modelo no singular de C. Para cada punto $P \in C$, tenemos que $\varphi^{-1}(P) = \{P_1, \ldots, P_s\}, P_j \neq P_k$, si $j \neq k$, donde $s = s(P)$ *denota el número de ramas irreducibles en* P.

Localmente, podemos suponer que $P = (0,0)$ y para cada punto $P_j \in \phi^{-1}(P)$, con $j = 1, \ldots, s$ podemos encontrar un sistema local de coordenadas

$$\phi_j(t) = (t^{m_j}, h_j(t)), 1 \leq j \leq s$$

m_j denota la multiplicidad de la rama irreducible C_j en P correspondiente al punto P_j, y h_j es una función holomorfa de orden mayor o igual a m_j. La función h_j no necesariamente es un polinomio.

En el caso particular en que $s = 1$, podemos tomar h de orden al menos $m+1$, y no congruente con cero módulo m. [4]

[3]El número δ_P es la dimensión del anillo cociente $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_{C,P}$, donde $\mathcal{O}_{C,P}$ denota el anillo de gérmenes de funciones holomorfas de C en P, y $\hat{\mathcal{O}}$ es la cerradura entera de $\mathcal{O}_{C,P}$. Este número es un entero no negativo, y además es un invariante analítico, [**K**].

[4]Si realizamos el cambio de variable, $w_j = exp(\frac{2\pi i}{m_j})$ y $m = m_1 + \ldots + m_s$ es la multiplicidad de C en P, definimos

$$R_j(x,y) = \prod_{\nu=0}^{m_j-1} \left[y - h_j(w_j^{\nu} x^{\frac{1}{m_j}}) \right] = y^{m_j} + a_{j1}(x) y^{m_j-1} + \ldots + a_{jm_j}(x)$$

y

$$R(x,y) = \prod_{j=1}^{s} R_j(x,y) = y^m + a_1(x) y^{m-1} + \ldots + a_m(x),$$

El siguiente resultadonos será útil para calcular el género de las curvas que daremos en ejemplos posteriores.

Proposición 3.3.3. *Si $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ es un polinomio irreducible homogéneo de grado d, y si $C = Z(F)$ es la curva asociada, entonces:*

1. $\frac{(d-1)(d-2)}{2} \geq \sum_{P \in SingC} \delta_P$.
2. $\delta_P \geq \frac{1}{2} m_P(m_P - 1)$.
3. $\delta_P = \frac{1}{2} m_P(m_P - 1)$ *si y sólo si,*
   (a) *toda rama irreducible tiene a P como un punto no singular, o es una cúspide simple de multiplicidad m_j, y además*
   (b) *las líneas tangentes a las ramas irreducibles de P son distintas entre si.*

En este caso decimos que P es *una singularidad ordinaria.*

Es posible demostrar que [**N**, pag. 120--122]:

Proposición 3.3.4. 1. *$\delta_P = 0$ si y sólo si P es un punto no singular de C.*
2. *$\delta_P = 1$ si y sólo si P es un nodo o una cúspide simple de multiplicidad dos.*

En particular, si C sólo tiene δ nodos simples

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta,$$

si C tiene sólo δ nodos y κ cúspides simples de multiplicidad dos, entonces

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta - \kappa$$

estas fórmulas se conocen como *las fórmulas de Plücker.*

En particular, si P es una cúspide con multiplicidad dos, $s_P = 1$ y localmente $\phi(t) = (t^2, b_k t^k + b_{k+1} t^{k+1} + \ldots)$, $(b_k \neq 0)$, donde $k \geq 3$, k impar, y en este caso $\delta_P = (k-1)/2$.

Una cúspide P sobre C con multiplicidad 2 se denomina *cúspide doble* si $\delta_P = 2$.

Una cúspide P sobre C con multiplicidad 2 se denomina *cúspide rampa* (ramphoide cusp) si $\delta_P = 3$.

Un punto singular $P \in C$ con $s_P = m_P = 2$ y $T_P C_1 = T_P C_2$ se denomina un *taconodo* si $\delta_P = 2$.

Un punto singular $P \in C$ con $s_P = m_P = 2$ y $T_P C_1 = T_P C_2$ se denomina un *osnodo* si $\delta_P = 3$.

---

donde las funciones $a_{jk}(x)$ y $a_k(x)$ son funciones holomorfas de la variable x, con $ord_{x=0} a_{jk}(x) \geq k$ y $ord_{x=0} a_k(x) \geq k$. Así $R(x, y)$ es un polinomio (de Weierstrass), y alrededor de P la curva C está dada como los ceros de R, esto es, $C = \{(x, y) \mid R(x, y) = 0\}$
.

	s_P	m_P	δ_P	nombre
(i)	1	2	1	Cúspide simple de multiplicidad dos
(ii)	1	2	2	Cúspide doble
(iii)	1	2	3	Cúspide Rampa
(iv)	1	3	3	Cúspide simple de multiplicidad tres
(v)	2	2	1	Nodo
(vi)	2	2	2	Tacnodo
(vii)	2	2	3	Osnodo
(viii)	3	3	3	Punto ordinario triple

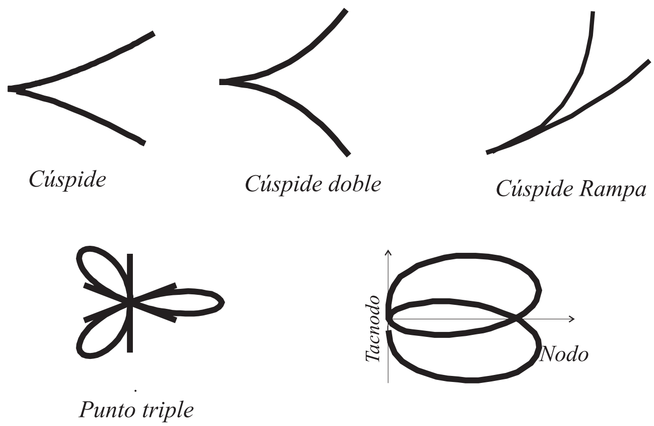

Figura 3.2. Distitnos tipos de puntos singulares.

Ejemplo 3.3.5. Punto singular $(0;0;1)$, salvo en el último ejemplo, en donde tenemos dos puntos singulares:

Cúspide simple: $x^3 = y^2 z$, parámetro local $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, dado por $\psi(t) = (t^2;t^3;t)$.

Cúspide doble: $x^5 = y^2$, parámetro local $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, dado por $\psi(t) = (t^2;t^5;t)$.

Cúspide Rampa: $(y - x^2)^2 = xy^3$, la imagen de $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ dada por $\psi(t) = (1+t^3;t^2;t^4)$.

Punto triple en $(0,0)$: $(x^2+y^2)^2 = x(x^2 - 3y^2)$

Tacnodo en $(0,0)$, nodo en $(1,0)$: $(x^2+y^2-3x)^2 = 4x^2(2-x)$

Nota: Una demostración de la fórmula del género, para curvas que sólo aceptan singularidades ordinarias puede encontrarse en [**W**, pg. 179], y en el caso general en [**N**, §2.1].

3.4. Curvas planas de grado bajo

Nuestra pregunta ahora es: ¿Dado un entero $d \geq 3$, qué tipo de curvas planas singulares irreducibles de grado d existen?

Analizaremos este problema para $d = 3, 4$ y 5, veremos qué géneros podemos obtener cuando aceptamos que F admita o no puntos singulares.

3.4.1. Curvas de grado tres. Cuando $d = 3$, la fórmula del género nos dice que $g(C) = 1 - \sum_P \delta_P$, por lo que, si $\delta_P = 0$ la curva C es no singular, este tipo de curvas se denomina curvas elípticas. La otra posibilidad es $\delta_P = 1$, en cuyo caso $g(C) = 0$, por lo que $C = \mathbb{P}^1$.

3.4.1.1. *Curvas elípticas.* En la presente sección nos interesa estudiar

$$\mathcal{C} : \quad \{(x; y; z) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\},$$

en el caso no singular, cuando $\deg(F) = 3$, en este caso, no sólo trabajaremos con el campo $\mathbb{C}$, sino que, trabajaremos con un campo arbitrario $\mathbb{K}$, con el fin de mostrar que algunas de las singularidades provienen de la característica del campo.

Consideremos el polinomio $F(x, y, z) = y^2z-(x^3+ax^2z+bxz^2+cz^3)$, donde $a, b, c \in \mathbb{K}$. Este es un polinomio homogéneo de tercer grado, pues cada término de F tiene grado 3.

Ya que para polinomios con coeficientes en un campo arbitrario $\mathbb{K}$ las derivadas parciales se definen de manera análoga al caso en que nuestro campo sea el campo real, o el complejo, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} := -(3x^2 + 2ax^2z + bz^2), \quad \frac{\partial F}{\partial y} := 2yz,$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial z} := y^2 - (ax^2 + 2bxz + 3cz^2),$$

Por lo que, determinar los puntos singulares de $\mathcal{C}$ equivale a encontrar $(x_0; y_0; z_0) \in \mathbb{P}^2$, con

$$\frac{\partial F}{\partial x}_{|(x_0;y_0:z_0)} = \frac{\partial F}{\partial y}_{|(x_0;y_0;z_0)} = \frac{\partial F}{\partial z}_{|(x_0;y_0;z_0)} = 0.$$

Por ejemplo, si $F(x, y, z) = y^2z - (x^3 + xz^2 + 6z^3)$ entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} := -(3x^2 + z^2), \quad \frac{\partial F}{\partial y} := 2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} := y^2 - (2xz + 18z^2),$$

las cuales se anulan si

$$3x^2 + z^2 = 0, \quad 2yz = 0, \quad , y^2 - (2xz + 18z^2)$$

La primera ecuación nos da $z^2 = -3x^2$, la segunda $y = 0$ o $z = 0$ y la tercera $y^2 = 2xz + 18z^2$.

Si $z = 0$, al sustituir en la primera ecuación tenemos $x = 0$, mientras que al sustiuir estos datos en la tercera ecuación nos da $y = 0$, pero $(0;0;0) \notin \mathbb{P}^2$.

Por otra parte, si $y = 0$, al sustituir en la segunda ecuación obtenemos $0 = 2xz + 18z^2 = 2z(x + 18z)$, de donde $z = 0$ o bien $x + 18z = 0$. El caso $y = z = 0$ implica $x = 0$, así $z \neq 0$ de donde $x = -18z$.

Evaluando ahora el polinomio F en el punto $(-18z;0;z)$ tenemos:

$$0 = y^2z - (x^3 + xz^2 + 6z^3) = -((-18z)^3 + (-18z)z^2 + 6z^3$$

$$= (-(18^3) - 12)z^3 = 5844z^3 = (4)(3)(487)z^3$$

y si la característica del campo, $char\ \mathbb{K} \neq 2, 3, 487$, entonces $z = 0$. De donde, si $char\ \mathbb{K} \neq 2, 3, 487$, la curva es no singular.

Dado $(x;y;z) \in \mathbb{P}^2 = (\mathbb{K}^3 - \{(0,0,0)\})/\sim$, entonces $(x;y;z)$ es la clase de equivalencia de un punto $(x,y,z) \in (\mathbb{K}^3 - \{(0,0,0)\})$ donde alguna de sus coordenadas no es cero. Si $z \neq 0$, entonces $(x;y;z) = z(x/z;y/z;1)$.

Luego entonces, si tomamos $z = 1$ obtenemos que

$$f(x,y) = F(x,y,1) = y^2 - x^3 + ax^2 + bx + c,$$

de donde

$$\{(x,y) \mid\ y^2 - x^3 + ax^2 + bx + c = 0\} \subset \{(x;y;z) \mid F(x,y,z) = 0\},$$

y nos faltará agregar los puntos de la forma $(x;y;0)$ que satisfagan la ecuación $F(x,y,0) = 0$.

Pero $F(x,y,0) = -x^3$, luego entonces $F(x,y,0) = 0$ si $x = 0$. Así, sólo nos falta agregar el punto $(0,y,0) = y(0,1,0)$.

El punto $(0,1,0) \in \mathbb{P}^2$ es “el punto al infinito" del plano afín $z = 1$.

La curva afín $\mathcal{C}$ puede normalizarse como

$$y^2 = f(x), \qquad \text{donde} \qquad f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

De donde, si la curva no tiene punto singular, su género es uno.

En la siguiente parte veremos qué sucede cuando esta curva admite puntos singulares. A partir de este momento, nuevamente trabajaremos sólo sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

3.4.1.2. *Cúbicas planas singulares.* Supongamos que

$$C = \{(x_0,;x_1;x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0;x_1;x_2) = 0\}$$

es una curva cúbica irreducible, y $\varphi : S \to C$ es un modelo no singular de C. De acuerdo con la fórmula del género, $g = 1 - \sum_{P \in Sing(C)} \delta_P$.

Así, $g = 1$ o bien $g = 0$. Si $g = 1$, entonces C es una curva cúbica no singular. Si $g = 0$ entonces C tiene un único punto singular P tal que $\delta_P = 1$, por lo que P es un nodo o una cúspide simple de multiplicidad dos.

PROPOSICIÓN 3.4.1. *Una cúbica plana irreducible $C \subset \mathbb{P}^2$ con un nodo, tiene género cero y es proyectivamente equivalente a la curva $y^2 = x^3 + x^2$. Esta cúbica admite a la función $\psi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ como parámetro local.*

Una cúbica plana irreducible $C \subset \mathbb{C}^2$ con una cúspide simple de multiplicidad dos es proyectivamente equivalente a la curva $y^2 = x^3$. Esta cúbica admite a la función $\psi(t) = (t^2, t^3)$ como parámetro local.

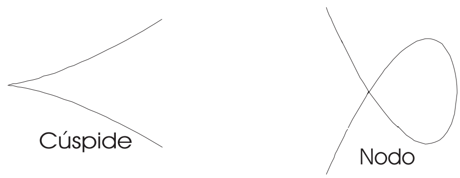

Figura 3.3. .

3.4.2. Cuárticas planas. Si C es una cuártica plana irreducible y $\varphi : S \to C$ es su modelo no singular, el género de S está dado por $g = 3 - \sum_{P \in Sing(C)} \delta_P$, así $0 \leq g \leq 3$.

• Si $g = 3$, la curva C es no singular, C es una curva no hiperelíptica de género tres.

Un ejemplo de esto lo constituye la curva $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$, como $\nabla F = (4x^3, 4y^3, 4z^3)$, entonces $\nabla F = 0$ si y solamente si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, pero $(0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^2$, por lo cual esta curva no tiene puntos singulares, y $g(F) = 3$.

Aún más, toda superficie de Riemann, S no hiperelíptica de género tres, puede representarse por medio de una cuártica plana no singular.

Basta considerar el sistema canónico $\mid K_S \mid$, ya que este define un sistema lineal g_4^2, pues $\deg K_S = 4$ y por Riemann-Roch $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, K_S) = 3$, si s_0, s_1, s_2 es una base de $H^0(S, K_S)$, entonces la aplicación $\phi_{K_S} : S \to \mathbb{P}^2$, definida como $\phi_{K_S}(p) = (s_0(p); s_1(p); s_2(p))$ tiene como imagen una cuártica plana no singular.

Por otra parte, si la curva es hiperelíptica, la aplicación canónica ϕ_{K_S} se factoriza a traves del g_2^1, por lo que su imagen es una cónica de multiplicidad dos, es decir, es una cuártica plana reducible.

• Si $g = 2$, la curva C tiene un punto singular, nodo simple o cúspide de multiplicidad dos.

Un ejemplo lo constituye la curva

$$C : F(x, y, z) = x^4 + xyz^2 + y^4.$$

Como $\nabla F(p) = (4x^3 + yz^2, 4y^3 + xz^2, 2xyz) = 0$ si y sólo si $p = (0; 0; 1) \in \mathbb{P}^2$, y $F(x, y, 1) = xy + x^4 + y^4$, entonces $f_2(x, y) = xy$ es producto de dos factores lineales distintos, así p es un nodo simple de multiplicidad $m_p = 2$, y $\delta_p = 1$, por lo que $g(C) = 2$.

• Si $g = 1$, entonces la superficie de Riemann asociada es un toro complejo, esto es, $S = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2)$, con $Im(w_1/w_2) > 0$.

En particular C puede ser una curva cuártica plana con dos nodos, o bien, un nodo y una cúspide simple.

Por ejemplo, la curva

$$C : F(x, y, z) = x^2y^2 + z^4 = 0.$$

Como $\nabla F = (2xy^2, 2x^2y, 4z^3)$, entonces $\nabla F(P) = 0$ si $z = 0$ y $xy = 0$, por lo cual C sólo tiene dos puntos singulares, a saber $P_0 = (1; 0; 0)$ y $P_1 = (0; 1; 0)$, como $F(1, y, z) = y^2 + z^4$ y $F(x, 1, z) = x^2 + z^4$, tenemos que P_0 y P_1 son puntos singulares del mismo tipo, $\delta_{P_0} = \delta_{P_1}$ y como $(d-1)(d-2)/2 = 3 \geq \sum_{P \in Sing(C)} \delta_P = 2\delta_{P_0}$, entonces $\delta_{P_0} = \delta_{P_1} = 1$, y tenemos que $g(C) = 3 - (2) = 1$.

Podemos tener también este tipo de curvas si tenemos una única cúspide doble, o bien un tacnodo.

Un ejemplo lo constituye la curva

$$C : F(x, y, z) = x^4 - y^2z^2 + z^4 = 0.$$

De manera análoga a la anterior, podemos ver que esta curva tiene un puntos singular en $\mathbb{P}^2$, a saber $P = (0; 1; 0)$ y La curva afín, $f(x, z) = F(x, 1, z) = -z^2 + x^4 - z^4$ de donde tenemos un punto singular de multiplicidad dos, podemos ver localmente tenemos dos ramas, así $s_P = m_P = 2$, y $T_PC_1 = T_PC_2$, aún más, podemos ver que este punto es un tacnodo, es decir, $\delta_P = 2$. Concluimos así que $g(C) = 3 - (2) = 1$.

Otra forma de ver esta curva es considerar el plano afín $z = 1$, en este plano, la curva induce la ecuación $y^2 = x^4 - 1$, la cual corresponde a un cubriente doble de la esfera de Riemann, con un punto de ramificación simple sobre cada una de las raíces cuartas de la unidad, y como consecuencia de la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que $g(C) = 1$.

• Finalmente, si $g = 0$ tenemos varias posibilidades: podemos tener un único punto triple singular, esto es, un punto ordinario triple, o bien, un punto triple con dos ramas irreducibles cortandose transversalmente, o finalmente una cúspide simple de multiplicidad tres.

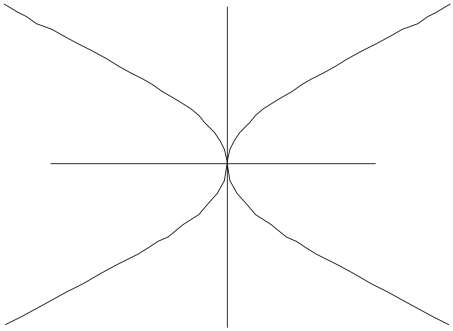

Figura 3.4. .

Como ejemplo de este caso tenemos la curva

$$C : F(x, y, z) = x^3y + z^4 = 0.$$

Podemos ver que C sólo tiene un punto singular, a saber $P = (0; 1; 0)$, pues $\nabla F = (3x^2y, x^3, 4z^3) = 0$ en $\mathbb{P}^2$ sólo si $x = z = 0$. Como $f(x, z) = F(x, 1, z) = x^3 + z^4$, tenemos que $f_3(x, y) = x^3$, así p es una cúspide de multiplicidad $m_P = 3$, y $\delta_P = \frac{3(3-1)}{2} = 3$

TEOREMA 3.4.2. *Si C es una cuártica plana racional entonces:*

1. *Si C tiene una cúspide "ramphoid", entonces C es proyectivamente equivalente a*
$$(y - x^2)^2 = xy^3$$
localmente tenemos la imagen de $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \phi(t) = (1 + t^3, t^2, t^4)$.
2. *Si C tiene una cúspide doble y una cúspide simple de multiplicidad dos, entonces C es proyectivamente equivalente a* $(y - x^2)^2 = x^3y$, *localmente tenemos la imagen de* $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \phi(t) = (1 + t; t^2; t^4)$.
3. *Si C tiene tres cúspides simples de multiplicidad dos, entonces C es proyectivamente equivalente a*
$$(2y - x^2)^2 = 4x^2(x - 2)(x + y)$$
(la cual es dual a $y^2 = x^3 + x^2$*), localmente* $(2y - x^2)^2 = 4x^2(x - 2)(x + y)$ *es la imagen de* $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \phi(t) = (t - 1/2; t^2; t^4 - 2t^3)$.

Ejemplos

1. Consideremos la curva C dada como el lugar de ceros del polinomio homogéneo $F(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$, entonces $F_x = 2x(y^2 + z^2)$, $F_y = 2y(x^2y + z^2)$ y $F_z = 2z(x^2 + y^2)$, de donde, F tiene como puntos singulares, $P_0 = (1; 0; 0), P_1 = (0; 1; 0)$ y $P_2 = (0; 0; 1$, como $f(x, y) = F(x, y, 1) = x^2 + y^2 + x^2y^2$, entonces $f_2(x, y) = x^2 + y^2 = (x + \imath y)(x - \imath y)$. Por lo que cada punto P_k es un nodo simple.

2. $C : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ La lemniscata:

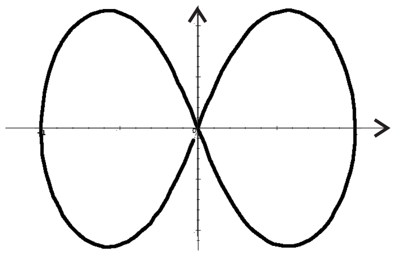

Figura 3.5. La lemniscata.

Podemos ver que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)z^2$, es la curva homogénea asociada, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x[2(x^2+y^2)-z^2], \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y[2(x^2+y^2)+z^2], \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z(x^2-y^2)$$

tenemos tres puntos singulares, a saber, nodos simples en $P_0 = (0, 0, 1)$, $P_1(1, \imath, 0)$ y $P_2 = (1, -\imath, 0)$. En este caso, $\delta_{P_k} = 1$, para $k = 0, 1, 2$, de donde $g(C) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \sum_k \delta_{P_k} = 3 - 3(1) = 0$

3. $C : (x^2 + y^2 - 3x)^2 = 4x^2(2 - x)$:

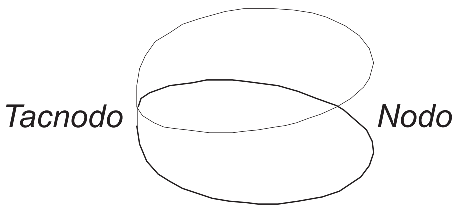

Figura 3.6.

Podemos ver que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 3xz)^2 + 4x^2(xz - 2z^2)$, es la curva homogenea asociada, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2 + y^2 - 3xz)(2x - 3z) + 4x^2z - 8x(2z^2 - xz),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 - 3xz],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -6xz(x^2 + y^2 - 3xz) - 4x^2(4z - x)$$

Para obtener los puntos singulares de ésta curva, necesitamos obtener los puntos $P = (x; y; z)$ tales que $F(P) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

Resolviendo este sistema, podemos ver que tenemos un *nodo*, en el punto $P_0 = (1, 0, 1)$ y un *tacnodo* en el punto $P_1 = (0, 0, 1)$.

En este caso, $\delta_{P_0} = 1$ en el nodo y como en una vecindad de P_1, $f(x, y) = F(x, y, 1) = (x^2 + y^2 - 3x)^2 = 4x^2(2 - x)$, de donde $f_2 = x^2$, así la línea tangente $T_{P_1} = x = 0$ tiene multiplicidad dos, de donde, $\delta_{P_1} = 2$.

Nuevamente $g(C) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \sum \delta_P = 3 - (1 + 2) = 0$

4. $C : (x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2$, la Limason:

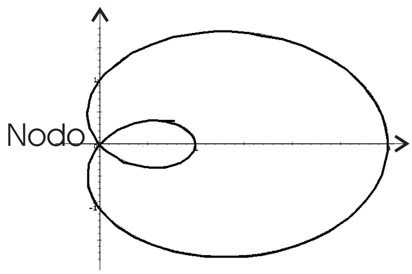

Figura 3.7. Limason.

Si consideramos el polinomio homogéneo asociado a la curva, podemos ver que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2xz)^2 - (x^2 + y^2)z^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2+y^2-2xz)(2x-2z)-2xz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-2xz)-2yz^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4x(x^2 + y^2 - 2xz) - 2z(x^2 + y^2)$$

Resolviendo el sistema $F = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, podemos ver que esta curva tiene un nodo en $(0; 0; 1)$ y dos cúspides simples con $m = 2$ en los puntos $(0; 1; \imath)$ y $(0; 1; -\imath)$. En este caso, $\delta_P = 1$ en cada uno de estos puntos, de donde

$$g(C) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \sum \delta_P = 3 - 3(1) = 0$$

5. La cardioide, $C : (x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$:

Realizando un análisis similar al de los casos anteriores, podemos ver que la curva C tiene tres cúspides simples de multiplicidad $m = 2$,

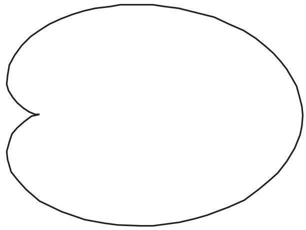

Figura 3.8. Cardioide

en los puntos $(0;0;1)$, $(1;\imath;0)$ y $(1;-\imath;0)$. En este caso, $\delta_P = 1$ en cada uno de estos puntos, de donde

$$g(C) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \sum \delta_P = 3 - 3 = 0$$

3.4.3. Quínticas planas. A continuación examinaremos algunos ejemplos de quínticas planas:

1. Si C está representada por un polinomio homogéneo de grado 5, no singular, entonces C tiene género seis. Un ejemplo de esta curva es $F(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5$.

Aún más, dada una superficie de Riemann de género 6 S, ésta tiene un único sistema lineal g_5^2, cuya imagen da la curva C (módulo equivalencias proyectivas).

2. Si $g = 5$, esta curva tiene un único punto singular, el cual es un nodo o bien una cúspide simple de multiplicidad dos, en este caso la superficie S es trigonal y no hiperelíptica.

Un ejemplo de esto lo constituye la curva $C : x^5 + xyz^3 + y^5 = 0$, esta curva sólo tiene un punto singular $(0;0;1)$ el cual es un nodo, pues $f(x,y,1) = xy + x^5 + y^5$ de donde $f_2 = xy$, por lo cual, tenemos dos líneas tangentes en $(0,0)$ distintas.

3. Si $g = 4$, entonces $\delta_P = 2$, por lo cual C no puede tener un punto triple (ni de orden superior), por lo cual podemos tener un punto doble, o bien, dos puntos singulares simples.

Un ejemplo de este tipo de curva está determinado por la ecuación $C : x^5 + x^3z^2 + x^2y^3 + y^2z^3 = 0$, esta curva tiene dos cúspides simples de multiplicidad dos en los puntos $(0;0;1)$ y $(0;1;0)$.

4. Si $g = 3$, entonces $\sum \delta_P = 3$, y sólo pueden ocurrir los siguientes casos:

(a) C tiene un punto triple, y en éste, P es el único punto singular de C, la proyección $\pi_P : S \to \mathbb{P}^1$ es una función meromorfa de grado dos así S es hiperelíptica.

(b) Si C no tiene un punto triple, pero tiene un punto doble, $P \in C$ con $\phi^{-1}(P) = P_1 + P_2 \in S$, entonces la proyección con centro en P, $\pi_P : S \to \mathbb{P}^1$ determina una función meromorfa de tercer grado entonces S en no hiperelíptica, y la curva canónica asociada a S es una cuártica plana no singular. Así es posible encontrar un único punto $P_o \in \phi_K(S)$ tal que $\pi_P = \pi_{P_o}$, de donde $D - (P_1 + P_2) \sim K - P_o$ para $d \in g_5^2$ de donde $g_5^2 =\mid K - P_o + P_1 + P_2 \mid$.

(c) si tiene tres puntos singulares con $\delta_P = 1$, estos puntos pueden ser nódos o bien, cúspides simples de multiplicidad dos, y tenemos varias configuraciones: (3 nodos, 0 cúspides), (2 nodos, 1 cúspide), (1 nodo, 2 cúspides), (0 nodos, 3 cúspides). Y podemos tener las siguientes configuraciones, véase 3.9:

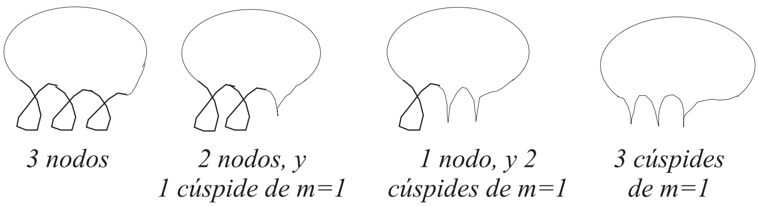

Figura 3.9

5. Si $g = 2$, entonces $\sum \delta_P = 4$, necesariamente nuestra curva es hiperelíptica y podemos tener desde un punto de orden cuatro, hasta cuatro puntos con $\delta_P = 1$.

Por ejemplo, la curva

$$C : F(x, y, z) = y^2z^3 - x^5 + z^5 = 0$$

tiene como punto singular $P(0; 1; 0)$, pues $\nabla F(P) = (-5x^4, 2yz^3, 3y^2z^2 + 5z^4) = 0$ si $x = 0, yz = 0$, pero si $y = 0$, entonces $z = 0$, pero $(0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^2$, por lo cual $y \neq 0$ y $z = 0$. Como $f(x, 1, z) = z^3 + (z^5 - x^5)$, entonces $m_P = 3$ y en el punto P tenemos $\delta_P \geq 3$, y podemos ver que $\delta_P = 4$, por lo que $g(C) = 2$. Nótese que $F(x, y, 1) = y^2 - x^5 + 1 = 0$ nos da la representación usual de una curva hiperelíptica como cubriente $2 : 1$ de la esfera de Riemann ramificándose en seis puntos, cinco de estos puntos los constituyen las raíces quintas de la unidad, y el otro punto es el punto al infinito, en particular $g(C) = 2$.

6. Si $g = 1$ La curva es elíptica. Un ejemplo de este tipo de curvas lo constituye la quíntica Del Pezzo, la cual fue descubierta por Del Pezzo en 1889, la cual tengo entendido, aparece en su artículo *Sulla quintica con cinque punti cuspidale,* la cual apareció en la revista, Napoli Rendicontim Ser. 2,3, Vol. 46 en 1889. Esta curva es de grado cinco y posee cinco cúspides simples de multiplicidad dos, puede encontrarse información sobre esta curva en [**L**], [**N**, pg.176-179] y [**Z**].

Esta curva puede obtenerse de una cuártica plana elíptica C'' con un tacnodo o una cúspide doble y una configuración especial de sus puntos singulares, por ejemplo, la curva

$$C'' : 7(x+y)^2 - (x+y)(7x^2 - 42xy + 31y^2) - xy(7x-y)^2 = 0.$$

La curva que buscamos está dada como la imagen de la aplicación $\psi : C'' \to \mathbb{P}^2$ dada como

$$\psi(x,y) = (1; \frac{1}{x}; \frac{64x}{x+y} + \frac{31(x+y)+xy}{x^2} + \frac{31(x+y)+xy}{x^3}.$$

Obtenemos así una configuración como muestra la Figura 3.10

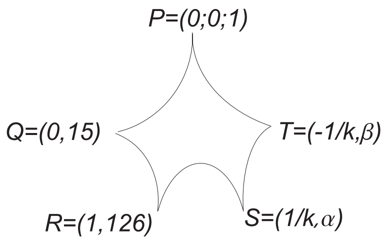

Figura 3.10. Quíntica del Pezzo.

donde $k = \sqrt{3/7}$, $\alpha = h(1/k, (-9+5k)/(31+k))$, $\beta = h(-1/k, (-9-5k)/(31-k))$.

7. S $g = 0$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4.3. *Quínticas planas singulares que admiten sólo cúspides como puntos singulares son proyectivamente equivalentes a uno de los siguientes tipos:*

1. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (1, t^4, t^5)$.
   O bien, $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (1 + at - (1+a)t^2, t^4, t^5)$.
2. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (1, t^2, t^4 + t^5)$.
   O bien $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (1, t^2, t^5)$.
3. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t - 1/2, t^2, t^5 - 3t^4/2)$.
4. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t - 1/2, t^4, t^5 + t^4/2)$.
5. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t, t^3 - 1, t^5 - 2t^2)$.
6. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t, t^3 - 1, t^5 + 2t^2)$.
7. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t - 1, t^3 - 5/32, t^5 + t^4 + 11t^2/16)$.
8. $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $\phi(t) = (t - 1, t^3 - 5/32, t^5 - 5t^4 - 25t^2/26 + 125/128)$.

Por ejemplo, usando la parametrización local dada en el inciso (1) tenemos la curva $C : F(x,y,z) = y^5 - z^4x = 0$, notamos que $\nabla F = (-z^4, 5y^4, -4z^3x)$ por lo que esta curva tiene a $P = (1;0;0) \in \mathbb{P}^2$como su único punto singular. Aún más, como $f(1, y, z) = y^5 - z^4$, entonces P es una cúspide simple de multiplicidad cuatro, de donde $\delta_P = \frac{4(4-1)}{2} = 6$ y $g(C) = 0$.

En la gráfica 3.11 mostramos los diversos tipos de configuraciones que se tienen en cada uno de los casos mencionados en el teorema:

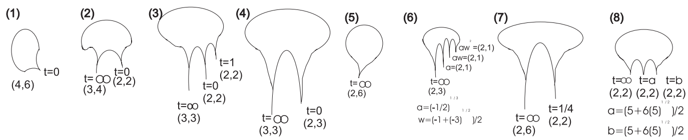

Figura 3.11. Las parejas (m, δ) indican la multiplicidad en el punto y el valor de δ.

Bibliografía

[F] Fulton, W., *Algebraic Curves*, Benjamin, Elmsford, New York, 1969.

[GH] Griffiths, P., Harrirs, J.,*Principles of algebraic geometry*, New York: Wiley, 1978.

[K] Kodarira, K., *On compact analytic surfaces I*, Annals of Math., **71**, 111-152, 1960.

[L] Lefschetz, S., *On the existence of loci with given singularities,* Transac. Amer. Math. Soc., **14**, 23-41, 1913.

[N] Namba, M., *Geometry of projective algebraic curves*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[W] Walker, R.J., *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Z] Zariski, O., *On the non-existence of curves of order 8 with 16 cusps*, Collected Papers, Vol. III, pg. 176-185.